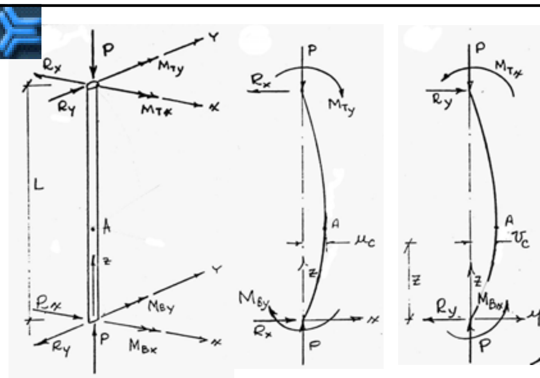
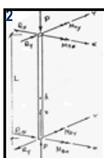
PGECIV FEN



Eq. Diferencial – Efeitos 2ª Ordem

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Mestrado Acadêmico
Faculdade de Engenharia – FEN/UERJ
Professor: Luciano Rodrigues Ornelas de Lima



PGECIV FEN

Efeitos de 2ª Ordem

- Até o presente momento, efeitos separados

$$M_z = +GK_t\phi' - EI_w\phi'''$$

$$M_x = -EI_x v'' \qquad V_y = -EI_x u'''$$

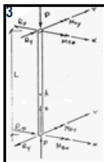
$$M_y = -EI_x u'' \qquad V_x = +EI_y v'''$$

$$EI_x + Pv'' = q$$

$$EI_y + Pu'' = q$$

- Equilíbrio na estrutura indeformada – forças internas independentes umas das outras

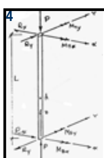
3



Efeitos de 2ª Ordem

- A partir de agora, as equações serão formuladas no membro deformado → a forma da seção transversal não se modifica
- As forças internas e as deformações não são independentes → devem ser consideradas na formulação
- Considera-se o caso mais geral → barra prismática carregada nas extremidades com momento fletor, cortante e normal de compressão → usar regra da mão direita para o momento fletor

4



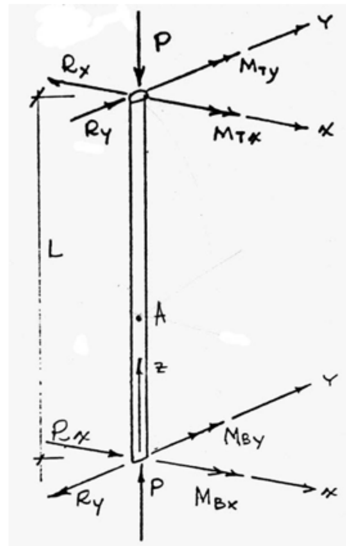
Efeitos de 2ª Ordem

- Assume-se
  - ✓pequenas deformações → efeito incluído
  - ✓comportamento elástico
  - ✓carregadas inicialmente
  - ✓as extremidades não se deslocam (apoio de garfo) → $u_0 = u_L = v_0 = v_L$
- Limitações
  - ✓seção transversal continua plana
  - ✓nenhuma força aplicada ao longo do membro
  - ✓a força axial é constante → P → compressão → positiva
  - ✓momentos positivos → regra da mão-direita

5

Efeitos de 2ª Ordem

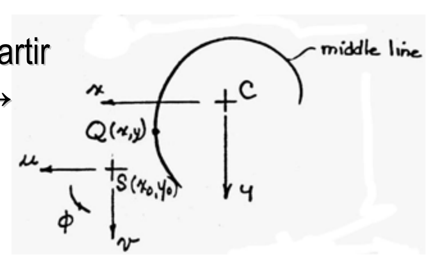
- Esta solução permite avaliar
  - ✓flambagem lateral de vigas
  - ✓flambagem torsional de colunas
  - ✓flexão biaxial
- Observando-se a figura ao lado
  - ✓carga axial P → + compressão
  - ✓M_{Bx}, M_{By}, M_{Tx}, M_{Ty} → +
  - ✓M_{Bx}, M_{By} → R_y
  - ✓M_{Tx}, M_{Ty} → R_x
  - ✓R_x e R_y → atuam no centro de cisalhamento



6

Efeitos de 2ª Ordem

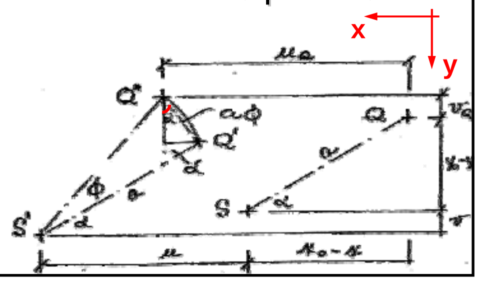
- Observando-se a figura abaixo
  - ✓a linha média da seção transversal → eixos principais x e y
  - ✓Q é um ponto qualquer ao longo da seção com coordenadas (x,y) a partir do centróide
  - ✓S é o centro de cisalhamentro localizado a x_0 e y_0 a partir do centróide
  - ✓Deslocamentos positivos a partir do centro de cisalhamento → u, v e ϕ → positivos nas direções indicadas



PGECIV

Efeitos de 2ª Ordem

- Move-se S para S' através de deslocamentos u e v
- Move-se Q para Q' devido aos deslocamentos u e v e depois para Q" devido à rotação ϕ (tudo positivo)
- Os deslocamentos de Q para Q' são u e v paralelos aos eixos x e y e os deslocamentos de Q' para Q" são:
  - ✓ $a.\phi.\sin\alpha$ // eixo x
  - ✓ $a.\phi.\cos\alpha$ // eixo y
- Logo, $u_A = u + a.\phi.\sin\alpha$ e $v_A = v - a.\phi.\cos\alpha$



PGECIV

Efeitos de 2ª Ordem

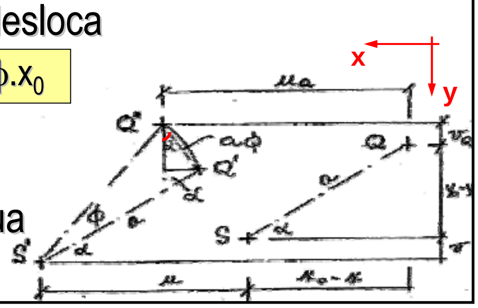
- Logo,
  - ✓ $u_A = u + a.\phi.\sin\alpha$ e $v_A = v - a.\phi.\cos\alpha$

  onde a é a distância entre Q e S

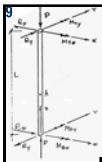
  mas $\sin\alpha = (y_0 - y)/a$ e $\cos\alpha = (x_0 - x)/a$ que fornece

  $u_Q = u + \phi.(y_0 - y)$ e $v_Q = v - \phi.(x_0 - x)$
- O centróide também se desloca

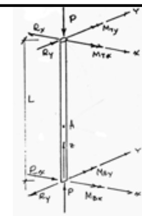
  $u_C = u + \phi.y_0$ e $v_C = v - \phi.x_0$
- Os deslocamentos de qq ponto são estabelecidos em termos de u, v, ϕ e sua localização original



9

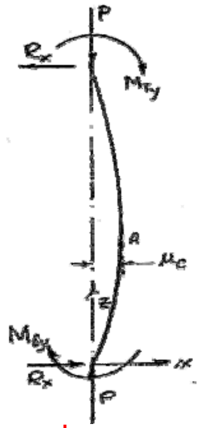


PGECIV



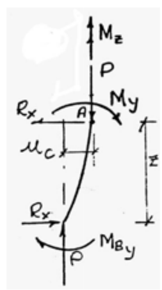
Efeitos de 2ª Ordem

- Equações de Equilíbrio
  - ✓ todos os esforços mostrados são positivos



plano xz

$$R_x = \frac{(M_{TY} + M_{BY})}{L}$$

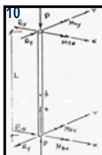


✓ M_y – ponto qualquer A ao longo do comprimento L (positivo)

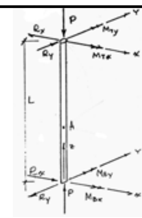
$$M_Y + M_{BY} + P.u_c - R_X.z = 0 \;\therefore$$

$$M_Y = -M_{BY} + \frac{z}{L}(M_{TY} + M_{BY}) - P.(u + \phi y_0)$$

10

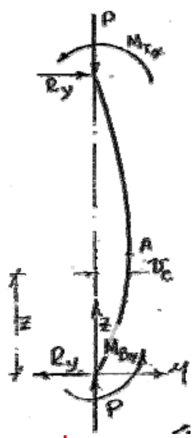


PGECIV



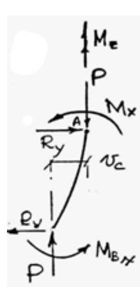
Efeitos de 2ª Ordem

- Equações de Equilíbrio
  - ✓ todos os esforços mostrados são positivos



plano yz

$$R_Y = \frac{(M_{TX} + M_{BX})}{L}$$



✓ M_X – ponto qualquer A ao longo do comprimento L (positivo)

$$M_X + M_{BX} - P.v_c - R_Y.z = 0 \;\therefore$$

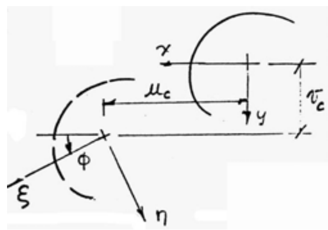
$$M_X = -M_{BX} + \frac{z}{L}(M_{TX} + M_{BX}) + P.(v - \phi x_0)$$

✓ Pelo equilíbrio do momento torsor, M_Z pode existir

11

Efeitos de 2ª Ordem

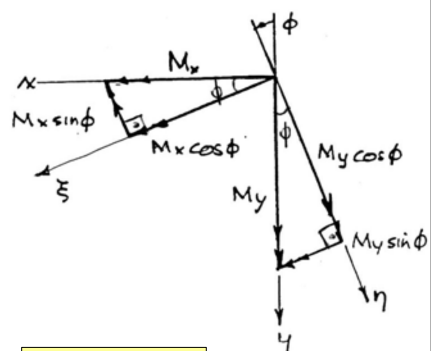
- Equações de Equilíbrio
  - ✓ a seção transversal não sofre deformações ao longo do comprimento da barra
  - ✓ sistema de coordenadas na configuração deformada → deslocamentos u_c, v_c e rotação ϕ
  - ✓ novo sistema de coordenadas ξ (xi) e η (eta)



12

Efeitos de 2ª Ordem

- Equações de Equilíbrio
  - ✓ os momentos anteriores em relação aos eixos x e y são agora modificados para representarem os momentos em relação aos novos eixos ξ e η



$$\boxed{M_\xi = M_x \cos\phi + M_y \sin\phi} \Rightarrow \boxed{M_\xi = M_x + M_y \phi}$$

$$\boxed{M_\eta = M_y \cos\phi - M_x \sin\phi} \Rightarrow \boxed{M_\eta = M_y - M_x \phi}$$

mas $\cos\phi = 1$ e $\sin\phi = \phi$
(pequenas rotações)

13

PGECIV

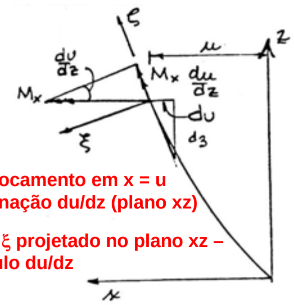
FEN

Efeitos de 2ª Ordem

- Equações de Equilíbrio
  - ✓ as deformações também resultam em momentos de torção
  - ✓ qualquer seção transversal a uma distância z da seção inferior → inclinação em relação ao eixo z original
  - ✓ momentos M_x e M_y tem componentes no eixo ζ (zeta) ⊥ seção transversal

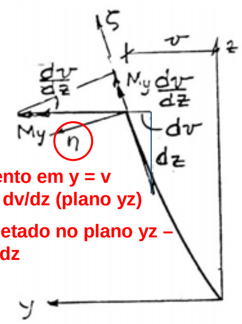
$$M_{\zeta 1} = M_x \frac{du}{dz} + M_y \frac{dv}{dz}$$

(onde sin = tan = ângulo)



deslocamento em x = u
inclinação du/dz (plano xz)

eixo ξ projetado no plano xz – ângulo du/dz



deslocamento em y = v
inclinação dv/dz (plano yz)

eixo η projetado no plano yz – ângulo dv/dz

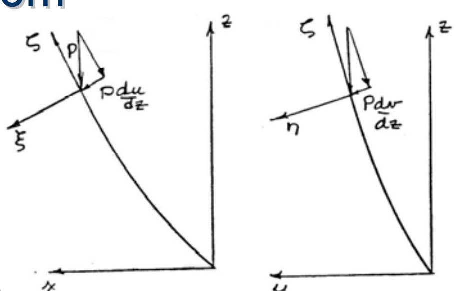
14

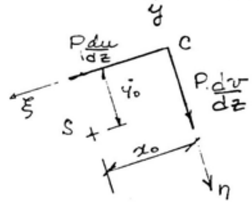
PGECIV

FEN

Efeitos de 2ª Ordem

- Equações de Equilíbrio
  - ✓ como o plano que contém a seção transversal está inclinado
  - ✓ surgem componentes nos planos ξ–ζ e η–ζ
  - ✓ as componentes são Pdu/dz na direção de ξ e Pdv/dz na direção de η
  - ✓ Como P atua ao longo de z passando pelo centróide, estas componentes causam momentos torsores $M_{\zeta 2}$ em relação ao centro de cisalhamento





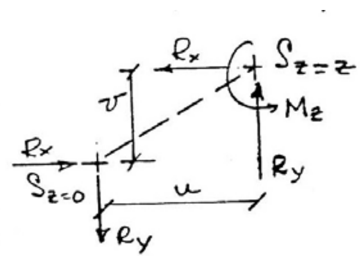
$$M_{\zeta 2} = P\left(y_0 \frac{du}{dz} - x_0 \frac{dv}{dz} \right)$$

15

PGECIV

Efeitos de 2ª Ordem

- Equações de Equilíbrio
  - ✓ considerando-se o cisalhamento no diagrama de corpo livre de B para A visto no plano, tem-se



$$\boxed{M_z + R_x.v + R_y.u = 0}$$

$$\boxed{M_z = -\frac{v}{L}\left(M_{Ty} + M_{By}\right) - \frac{u}{L}\left(M_{Tx} + M_{Bx}\right)}$$

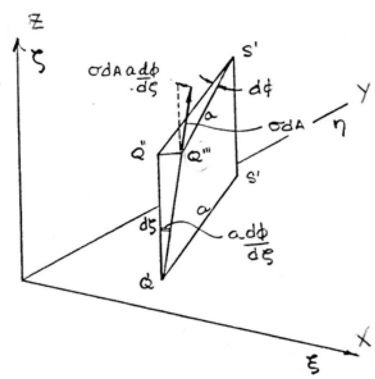
$$\boxed{M_{\zeta 3} \approx M_z = -\frac{v}{L}\left(M_{Ty} + M_{By}\right) - \frac{u}{L}\left(M_{Tx} + M_{Bx}\right)}$$

16

PGECIV

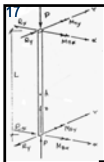
Efeitos de 2ª Ordem

- Equações de Equilíbrio
  - ✓ finalmente, considerando-se a parcela referente ao empenamento – 2 seções → dζ
  - ✓ as tensões normais devido a P, M_ξ e M_η são inclinadas em relação ao eixo ζ e possuem uma componente que causa torção em relação ao eixo ζ
  - ✓ o elemento de tensões é σdA e está inclinado segundo um ângulo adφ/dζ e o momento torsor em relação ao CS vale



$$\boxed{M_{\zeta 4} = -a.\sigma dA.a.\frac{d\phi}{d\zeta}}$$

17



PGECIV

FEN

Efeitos de 2ª Ordem

- Equações de Equilíbrio
  - ✓ integrando-se ao longo de toda a seção transversal, tem-se

$$M_{\zeta 4} = -a.\sigma dA.a.\frac{d\phi}{d\zeta} \Rightarrow M_{\zeta 4} = -\frac{d\phi}{d\zeta}\int_A \sigma.a^2 dA$$

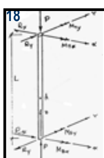
se $\bar{k} = \int_A \sigma.a^2 dA$ e porque $d\zeta \approx dz \Rightarrow$ $M_{\zeta 4} = -\bar{k}\frac{d\phi}{d\zeta}$

Logo

$$M_{\zeta} = M_{\zeta 1} + M_{\zeta 2} + M_{\zeta 3} + M_{\zeta 4}$$

$$M_{\zeta} = M_x u' + M_y v' + P.y_0.u' - P.x_0.v' - \frac{v}{L}\left(M_{Ty} + M_{By}\right) - \frac{u}{L}\left(M_{Tx} + M_{Bx}\right) - \bar{k}.\phi'$$

18



PGECIV

FEN

Efeitos de 2ª Ordem

- Equações de Equilíbrio
  - ✓ conhecendo-se os momentos M_ξ, M_η e M_ζ, pode-se equacionar a resistência interna do membro assumindo-se cos da inclinação ≈ 1

$$M_\xi = -EI_x v'' = -B_x v''$$

$$M_\eta = +EI_y u'' = +B_y u''$$

$$M_\zeta = +GJ\phi' - EI_w \phi''' = C_T \phi' - C_w \phi'''$$

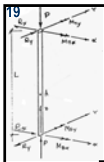
e $M_\xi = M_x + M_y \phi = -B_x v''$ $\quad M_\eta = M_y - M_x \phi = B_y u''$

mas

$$M_X = -M_{BX} + \frac{z}{L}\left(M_{TX} + M_{BX}\right) + P.\left(v - \phi x_0\right)$$

$$M_Y = -M_{BY} + \frac{z}{L}\left(M_{TY} + M_{BY}\right) - P.\left(u + \phi y_0\right)$$

19



PGECIV

Efeitos de 2ª Ordem

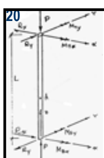
- Equações de Equilíbrio
  - ✓ portanto,

$$-M_{Bx}+\frac{z}{L}\left(M_{Tx}+M_{Bx}\right)+P.\left(v-\phi x_0\right)-M_{By}\phi+$$
$$+\frac{z}{L}\left(M_{Ty}+M_{By}\right)-P.\left(u-\phi y_0\right)\phi=-B_x v''$$

  - ✓ e negligenciando-se os termos que envolvem produtos de derivadas

$$P.\left(u-\phi y_0\right)\phi$$

20



PGECIV

Efeitos de 2ª Ordem

- Equações de Equilíbrio
  - ✓ flexão na maior inércia

$$B_x v''+P.v-\phi\left[M_{By}-\frac{z}{L}\left(M_{Ty}+M_{By}\right)+P.x_0\right]=M_{Bx}-\frac{z}{L}\left(M_{Tx}+M_{Bx}\right)$$

  - ✓ flexão na menor inércia

$$B_y u''+P.u-\phi\left[M_{Bx}-\frac{z}{L}\left(M_{Tx}+M_{Bx}\right)-P.y_0\right]=-M_{By}+\frac{z}{L}\left(M_{Ty}+M_{By}\right)$$

21

PGECIV

FEN

Efeitos de 2ª Ordem

- Equações de Equilíbrio

  ✓ torção

$$C_w\phi''' - \left(C_T + \bar{k}\right)\phi' + u'\left[-M_{Bx} + \frac{z}{L}\left(M_{Tx} + M_{Bx}\right) + P.y_0\right] +$$

$$-v'\left[+M_{By} - \frac{z}{L}\left(M_{Ty} + M_{By}\right) + P.x_0\right] +$$

$$-\frac{v}{L}\left(M_{Ty} + M_{By}\right) - \frac{u}{L}\left(M_{Tx} + M_{Bx}\right) = 0$$

22

PGECIV

FEN

Efeitos de 2ª Ordem

- Equações de Equilíbrio
  - ✓ as equações são funções lineares de três deformações, u, v e ϕ com derivadas de 3ª ordem
  - ✓ Estas equações não são independentes umas das outras
    - Flexão na maior inércia depende do ângulo de torção
    - Flexão na menor inércia depende do ângulo de torção
    - Torção depende de u, v, u' e v'